

# Probabilità e Distribuzioni di Probabilità

Corso di Statistica di base

Giancarlo Ferrari

# Introduzione

- Entrando nel campo delle probabilità e delle distribuzioni di probabilità si entra nel settore dell'**inferenza statistica**
- Possiamo definire l'inferenza statistica come l'insieme di quelle procedure di natura matematica per cui le caratteristiche di una popolazione vengono dedotte (inferite) dall'osservazione fatta su una parte di essa detta «campione»
- Il campione viene solitamente selezionato in maniera casuale in modo tale che possa ritenersi rappresentativo della popolazione dalla quale viene estratto e per tale motivo le variabili in studio prendono il nome di Variabili Casuali

## Introduzione

- Ciò che è fondamentale comprendere è che l'inferenza mira alla verifica di una ipotesi relativa alla caratteristica della popolazione che si sta studiando
- Il procedimento prevede pertanto una formulazione della ipotesi che si vuole sottoporre a verifica e successivamente la valutazione della probabilità di ottenere quei risultati se l'ipotesi formulata fosse vera

# Introduzione

- Il percorso logico prevede quindi le seguenti fasi:
  - Formulazione della ipotesi
  - Disegno dello studio (che prevede la definizione di cosa si intende rilevare nella popolazione di riferimento e delle modalità attraverso le quali il campione verrà estratto e la sua numerosità)
  - Estrazione del campione
  - Calcolo delle statistiche campionarie (ad esempio media campionaria)
  - Stima e confronto dei parametri nella popolazione in base ai risultati forniti dal campione
- Questo percorso è essenziale per la costruzione dell'evidenza scientifica

# Introduzione

- **POPOLAZIONE**

- Si definisce come l'insieme che raccoglie tutte le osservazioni possibili relativamente ad una data variabile e può essere finita (comunque molto grande come ad esempio la popolazione di individui sulla Terra) o infinita (ad esempio la 'popolazione' costituita dai risultati del lancio di un dado o di una moneta)

- **CAMPIONE**

- Raccolta finita di elementi estratti da una popolazione

## Introduzione

- E' estremamente importante comprendere che le distribuzioni di frequenza osservabili su dati campionari possono essere confrontate con distribuzioni (di probabilità) teoriche mediante le quali poter operare inferenze sulla popolazione
- La funzione che associa ad ogni valore della variabile casuale una probabilità prende il nome di «Distribuzione di Probabilità»

## Concetto di probabilità

- La **definizione classica** della probabilità di un evento è il rapporto fra il numero di casi favorevoli ed il numero di casi possibili che si presuppone essere tutti ugualmente possibili
- Questa è la definizione anche detta a priori
- Ad esempio il lancio di 1 dado può dare 6 risultati possibili e la probabilità che il risultato sia 1 è uguale a  $1/6$

## Concetto di probabilità

- La definizione **frequentista** della probabilità di un evento è uguale al rapporto tra il numero di prove nel corso delle quali l'evento si è verificato ed il numero totale di prove effettuate (tutte nelle stesse condizioni)
- E' detta anche a posteriori
- Ad esempio se si lancia una puntina da disegno essa può cadere in due posizioni diverse, con la punta rivolta verso l'alto o verso il basso. In questo caso è molto difficile stabilire una probabilità a priori e quindi si applica la probabilità frequentista effettuando N lanci e contando, ad esempio, il numero di volte in cui si verifica l'evento 'Puntina verso il basso'.



## Concetto di probabilità

- Esiste infine la **probabilità soggettivista** di un evento che è la misura del grado di fiducia che una persona, in base alle informazioni in suo possesso e alla sua opinione, assegna al verificarsi di un evento
- Un esempio di probabilità soggettivista può essere ad esempio la probabilità che una nuova trasmissione televisiva incontri il favore del pubblico, oppure che una squadra di calcio che cambia formazione vinca una partita.

## Concetto di probabilità

- La probabilità di un evento è sempre compresa tra 0 e 1
- Se un evento ha probabilità 0 allora si dice che è un evento impossibile
- Se un evento ha probabilità 1 si dice che è un evento certo

## Concetto di probabilità

- Si indica la probabilità **p** di un evento **E** con i simboli:

$$p = P(E) = \frac{m}{n}$$

- dove *m* rappresenta il numero dei casi favorevoli ed *n* il numero di casi possibili

## Concetto di probabilità

- Ad esempio la probabilità che lanciando un dado esca un numero pari (2, 4 o 6) fa sì che  $m = 3$  mentre tutti i casi possibili (1, 2, 3, 4, 5, 6) sono  $n = 6$  (le sei facce del dado)

$$p = P(E) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

## Concetto di probabilità

- La definizione di probabilità che viene utilizzata in genere nella statistica è la concezione 'classica' e quella 'frequentista' dove la probabilità di eventi viene espressa come la frequenza su tutti i casi possibili o che viene osservata su un grande numero di prove.

## Concetto di probabilità

- L'insieme di tutti gli eventi possibili di un esperimento viene definito come  $\Omega$  (omega) che viene definito anche come 'spazio campionario'
- Ad esempio nel caso di una moneta dove gli eventi possibili sono 'testa' o 'croce' essi rappresentano lo spazio campionario di tutti gli eventi possibili.

## Concetto di probabilità

- Vi sono delle semplici operazioni che si possono eseguire sulla probabilità
- Ad esempio se l'evento A ha probabilità P allora 1-P sarà la probabilità dell'evento non-A e si indica con:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

## Concetto di probabilità

- Si hanno due principi fondamentali sulla probabilità degli eventi:
  - **Principio delle probabilità totali:** la probabilità dell'evento unione di due eventi  $E_1 \cup E_2$  (dove il simbolo  $\cup$  si legge 'o') è uguale alla somma delle loro probabilità (se gli eventi sono incompatibili -  $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ ) viceversa se gli eventi sono compatibili occorre sottrarre la probabilità dell'evento intersezione  $E_1 \cap E_2$  (dove il simbolo  $\cap$  si legge 'e') e si ha:  
$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$
  - **Principio delle probabilità composte:** in base al quale l'evento intersezione di due eventi  $E_1 \cap E_2$  è uguale al prodotto delle loro probabilità se sono eventi indipendenti:  $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$  al contrario se gli eventi sono dipendenti si ha  $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1)$  dove  $P(E_2|E_1)$  è definita come la probabilità dell'evento  $E_2$  **condizionata** al verificarsi dell'evento  $E_1$



# Concetto di probabilità

## Probabilità totali

- Principio della probabilità totale con eventi **incompatibili** (quando il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro)
- Ad esempio consideriamo un mazzo di 52 carte e i due eventi:

$E_1$  estrarre un asso

oppure

$E_2$  estrarre un fante

$$P(E_1) = 4/52 = 1/13$$

$$P(E_2) = 4/52 = 1/13$$

I due eventi si escludono a vicenda poiché il verificarsi dell'evento  $E_1$  esclude il verificarsi dell'evento  $E_2$  (e viceversa)

In questo caso si ha quindi che:  $P(E_1 \cup E_2) = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13} \sim 0,15$  (15%)

# Concetto di probabilità

## Probabilità totali

- Due eventi si dicono **compatibili** quando il verificarsi dell'uno non esclude il verificarsi dell'altro
- Ad esempio consideriamo un mazzo di 52 carte e i due eventi:

$E_1$  estrarre un asso

oppure

$E_2$  estrarre una carta di cuori

$$P(E_1) = 4/52$$

$$P(E_2) = 13/52$$

I due eventi non si escludono a vicenda poiché il verificarsi dell'evento  $E_1$  non esclude che l'evento  $E_2$  possa verificarsi (estrazione dell'asso di cuori)

$$\text{In questo caso si ha quindi che: } P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} \sim 0,308(30,8\%)$$

# Concetto di probabilità

## Probabilità composte

- Considerare un evento composto da più eventi singoli tale che siano **indipendenti**
- Ad esempio consideriamo un mazzo di 52 carte dal quale si estraggono due carte. Si vuole calcolare la probabilità che estraendo una prima carta essa sia una figura e la seconda un asso (l'esperimento viene effettuato con reimmissione, vale a dire che la prima carta estratta viene reimpressa nel mazzo).

$E_1$  estrarre una figura

$E_2$  estrarre un asso

$$P(E_1) = 12/52$$

$$P(E_2) = 4/52$$

In questo caso poiché l'esperimento viene effettuato con reimmissione della prima carta estratta il risultato della seconda prova non viene condizionato dal risultato della prima.

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{12}{52} \cdot \frac{4}{52} \sim 0,0177 \text{ (1,77\%)}$$

# Concetto di probabilità

## Probabilità composte

- Consideriamo lo stesso esperimento ma questa volta senza reimmettere la prima carta estratta nel mazzo
- La probabilità è sempre composta da due eventi: la prima di estrarre una figura e la seconda di estrarre un asso

$E_1$  estrarre una figura

$E_2$  estrarre un asso

$$P(E_1) = 12/52$$

$$P(E_2) = 4/51$$

In questo caso poiché l'esperimento viene effettuato senza reimmissione la probabilità di estrarre un asso (nell'ipotesi che il primo evento si sia verificato) è stata modificata poiché andrà calcolata non più sul totale delle 52 carte ma sulle rimanenti 51

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) = \frac{12}{52} \cdot \frac{4}{51} \sim 0,0181 \text{ (1,81\%)}$$

## Distribuzioni di Probabilità

- E' importante fare una osservazione:
- Si prenda il lancio di una moneta con i 2 possibili risultati:

Variabile aleatoria	Lancio di una moneta (risultato)	Probabilità
Modalità	Testa	0,5
Modalità	Croce	0,5
TOTALE		1

- La probabilità è simile alla frequenza relativa e laddove la sommatoria delle frequenze relative era pari a 1 (o 100% se espresso in percentuale) delle osservazioni nel caso di una Variabile Casuale la somma delle probabilità di tutti i possibili eventi è anche uguale a 1

## Distribuzioni di Probabilità

- Le Variabili casuali sono in genere rappresentate da lettere maiuscole ( $X, Y, Z$ ) la cui distribuzione di probabilità può essere di tipo: DISCRETA o CONTINUA
- Una distribuzione di probabilità è un modello matematico che collega il valore di una variabile alla probabilità che tale valore possa essere osservato
- Ciascuno dei risultati di una variabile è associato ad una determinata probabilità attraverso una funzione che viene chiamata «distribuzione di probabilità» della variabile casuale

## Distribuzioni di Probabilità

- Il modo in cui la probabilità si distribuisce sui valori della distribuzione può essere determinato in tre modi:
  - Attraverso la **funzione di massa** (o funzione di probabilità) definita solo per variabili casuali discrete
  - Attraverso la **funzione di densità** definita solo per variabili casuali continue
  - Attraverso la **funzione di ripartizione** (o funzione delle probabilità cumulate)

# Distribuzioni di Probabilità

- DISCRETA

- Funzione di probabilità (di massa)  $\Pr(X = x_i) = p_i$
- Funzione di ripartizione (cumulativa)  $F(x_i) = \Pr(X \leq x_i) = \sum_{X \leq x_i} p_i$

- CONTINUA

- Funzione di densità di probabilità  $\Pr(x_i \leq X \leq x_j) = \int_{x_i}^{x_j} f(x) dx$
- La funzione di ripartizione  $F(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$



## Distribuzioni di Probabilità

- E' importante osservare che nel caso di variabili discrete la funzione di probabilità di massa specifica tutti i possibili risultati e la probabilità che un particolare risultato si verifichi
- Mentre per le variabili casuali continue la funzione di densità consente di determinare le probabilità associate a determinati range di valori.

## Distribuzioni di Probabilità

- La scelta del modello della distribuzione di probabilità da adattare ad un particolare problema è spesso condotta per mezzo del confronto tra la forma dell'istogramma e la forma della funzione di massa, o funzione di densità
- In sostanza la scelta errata del modello di distribuzione di probabilità può comportare uno scostamento più o meno grande dai valori della distribuzione osservata

# Distribuzioni di Probabilità

- Verranno trattate le seguenti distribuzioni di probabilità per variabili casuali:
  - Binomiale
  - Multinomiale
  - Poisson
  - Normale

# Distribuzione Binomiale

## Distribuzioni di Probabilità - Binomiale

- Abbiamo già trattato delle variabili di tipo dicotomico nella statistica descrittiva definendola come una variabile che può assumere solo due valori possibili
- I risultati di una variabile binomiale vengono spesso indicati come 'successo' o 'insuccesso'
- Un variabile di questo tipo è nota anche come *Variabile casuale di Bernoulli*

## Distribuzioni di Probabilità - Binomiale

- Sia  $Y$  una variabile casuale che rappresenta l'atteggiamento rispetto al fumo
- $Y = 1$  se un adulto è fumatore ed  $Y = 0$  se non fumatore
- Si supponga di disporre dell'informazione che nella popolazione il 29% degli individui è fumatore ( $\pi = 0,29$ )
- Naturalmente la proporzione di non fumatori  $1 - \pi = 0,71$

## Distribuzioni di Probabilità - Binomiale

- Possiamo pertanto quantificare le probabilità relative a ciascuna delle due modalità come segue:

$$\Pr(Y = 1) = \pi = 0,29$$

$$\Pr(Y = 0) = 1 - \pi = 1 - 0,29 = 0,71$$

Queste due equazioni descrivono la distribuzione di probabilità della variabile casuale dicotomica  $Y$

Si ricordi che la proporzione di volte in cui una variabile casuale dicotomica assume il valore 1 corrisponde al suo valore medio

## Distribuzioni di Probabilità - Binomiale

- Si abbia il semplice esempio di  $n = 2$  (individui rispetto ai quali si vuole conoscere come si distribuisce la variabile casuale 'numero di fumatori' =  $X$ ) e dove  $\pi = 0,29$
- I valori che  $X$  può assumere sono 1 se fumatore e 0 se non fumatore:

Risultato di Y		Probabilità	X (Numero fumatori)
Primo soggetto	Secondo soggetto		
0	0	$(1 - \pi) \cdot (1 - \pi)$	0
1	0	$\pi \cdot (1 - \pi)$	1
0	1	$(1 - \pi) \cdot \pi$	1
1	1	$\pi \cdot \pi$	2



## Distribuzioni di Probabilità - Binomiale

- La condizione necessaria per condurre un esperimento come quello precedente (di tipo Bernoulliano) è che le  $n$  prove siano indipendenti. Vale a dire che la probabilità di un risultato tra le singole prove resti costante

NOTA: Un campione di  $n$  prove **indipendenti** è ad esempio eseguire 10 lanci di un dado ( $n=10$ ) e calcolare la probabilità che esca sempre un numero pari (il risultato di una prova non influenza il risultato della prova successiva).

Un campione di  $n$  prove **non-indipendenti** è ad esempio la probabilità che da un'urna contenente 10 palline bianche e 10 palline nere se ne estraggano 5 e si vuole calcolare la probabilità che siano tutte bianche senza però reimmettere nell'urna le palline che vengono via via estratte. In questo caso la probabilità nel corso di una singola estrazione cambia perché diminuisce progressivamente il numero di palline nell'urna

## Distribuzioni di Probabilità - Binomiale

- Sostituendo con i valori di  $\pi = 0,29$  e  $1 - \pi = 0,71$
- $\Pr(X = 0) = (1 - \pi)^2 = (0,71)^2 = \mathbf{0,5041}$
- $\Pr(X = 1) = \pi(1 - \pi) + (1 - \pi)\pi = 2(0,29 \cdot 0,71) = \mathbf{0,4118}$
- $\Pr(X = 2) = \pi^2 = (0,29)^2 = \mathbf{0,0841}$

Naturalmente  $0,5041 + 0,4118 + 0,0841 = \mathbf{1}$

## Distribuzioni di Probabilità - Binomiale

- Si noti il numero di modi con cui le probabilità delle singole coppie di eventi si possono realizzare:
- $\Pr(X = 0) = (0,71)^2 = \mathbf{0,5041}$  1 solo modo
- $\Pr(X = 1) = 2(0,29 \cdot 0,71) = \mathbf{0,4118}$  2 possibili modi
- $\Pr(X = 2) = (0,29)^2 = \mathbf{0,0841}$  1 solo modo

## Distribuzioni di Probabilità - Binomiale

- In generale se abbiamo una sequenza di  $n$  esperimenti indipendenti di Bernoulli – o  $n$  risultati indipendenti della variabile casuale  $Y$  di Bernoulli – ognuno con probabilità di successo  $\pi$  il numero totale di successi  $X$  è una variabile casuale binomiale
- I numeri fissi  $n$  e  $\pi$  sono denominati i parametri della distribuzione
- Nell'esempio precedente i parametri sono:  $n = 2$  e  $\pi = 0,29$
- Formalmente si scrive:  $S \sim B(n, \pi)$  che sta a significare che il numero di successi  $S$  in un campione è distribuito come una Binomiale con parametri  $n$  e  $\pi$

## Distribuzioni di Probabilità - Binomiale

- La distribuzione binomiale presuppone tre assunzioni:
  1. Esiste un numero fisso di esperimenti  $n$  ognuno dei quali dà luogo ad uno dei due risultati mutuamente esclusivi
  2. I risultati degli  $n$  esperimenti sono indipendenti
  3. La probabilità di successo  $\pi$  è costante in ciascun esperimento

## Distribuzioni di Probabilità - Binomiale

- Supponiamo ora di voler ampliare l'esempio precedente selezionando in questo caso 3 adulti
- La variabile casuale discreta binomiale  $X$  in questo caso ha parametri:  
 $n = 3, \pi = 0,29$

# Distribuzioni di Probabilità - Binomiale

$$S \sim B(n = 3, \pi = 0,29)$$

Risultato di Y			Probabilità	X (Numero fumatori)
Primo soggetto	Secondo soggetto	Terzo soggetto		
0	0	0	$(1 - \pi) \cdot (1 - \pi) \cdot (1 - \pi)$	0
1	0	0	$\pi \cdot (1 - \pi) \cdot (1 - \pi)$	1
0	1	0	$(1 - \pi) \cdot \pi \cdot (1 - \pi)$	1
0	0	1	$(1 - \pi) \cdot (1 - \pi) \cdot \pi$	1
1	1	0	$\pi \cdot \pi \cdot (1 - \pi)$	2
1	0	1	$\pi \cdot (1 - \pi) \cdot \pi$	2
0	1	1	$(1 - \pi) \cdot \pi \cdot \pi$	2
1	1	1	$\pi \cdot \pi \cdot \pi$	3

## Distribuzioni di Probabilità - Binomiale

- $\Pr(X = 0) = (1 - \pi)^3 = (0,71)^3 = \mathbf{0,3579}$
- $\Pr(X = 1) = 3 \cdot \pi(1 - \pi)^2 = 3 \cdot 0,29 \cdot (1 - 0,29)^2 = \mathbf{0,4386}$
- $\Pr(X = 2) = 3 \cdot \pi^2 \cdot (1 - \pi) = 3 \cdot (0,29)^2 \cdot 0,71 = \mathbf{0,1791}$
- $\Pr(X = 3) = \pi^3 = 0,29^3 = \mathbf{0,0244}$
- **Anche in questo caso  $\Pr(X=0)+\Pr(X=1)+\Pr(X=2)+\Pr(X=3) = 1$**



## Distribuzioni di Probabilità - Binomiale

- Si noti anche in questo caso il numero di modi in cui le probabilità di eventi combinati si possono realizzare:

• $\Pr(X = 0)$	1 solo modo
• $\Pr(X = 1)$	3 possibili modi
• $\Pr(X = 2)$	3 possibili modi
• $\Pr(X = 3)$	1 solo modo

## Distribuzioni di Probabilità - Binomiale

- In generale se selezioniamo  $n$  individui dalla popolazione dove la probabilità di essere fumatore è pari a  $\pi$  la probabilità di ottenere esattamente che  $x$  siano fumatori può essere scritta come:

$$P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$

dove  $\frac{n!}{x!(n-x)!}$  rappresenta il coefficiente binomiale (il numero di modi possibili in cui  $x$  elementi possono essere selezionati da un totale di  $n$  elementi senza considerarne l'ordine)

Le quantità  $n!$  ed  $x!$  si leggono  *$n$  ed  $x$  fattoriali*

## Distribuzioni di Probabilità - Binomiale

- $n! = n(n - 1)(n - 2)(n - 3) \dots (1)$
- Ad esempio  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- Per definizione  $0! = 1$
- Il coefficiente binomiale si scrive nel seguente modo:  
$$\binom{n}{x} \text{ che equivale appunto a } \frac{n!}{x! (n - x)!}$$

## Distribuzioni di Probabilità - Binomiale

- A questo punto possiamo applicare la formula generale per l'esempio precedente di una distribuzione con parametri  $n=3$ ,  $\pi = 0,29$

$$\Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

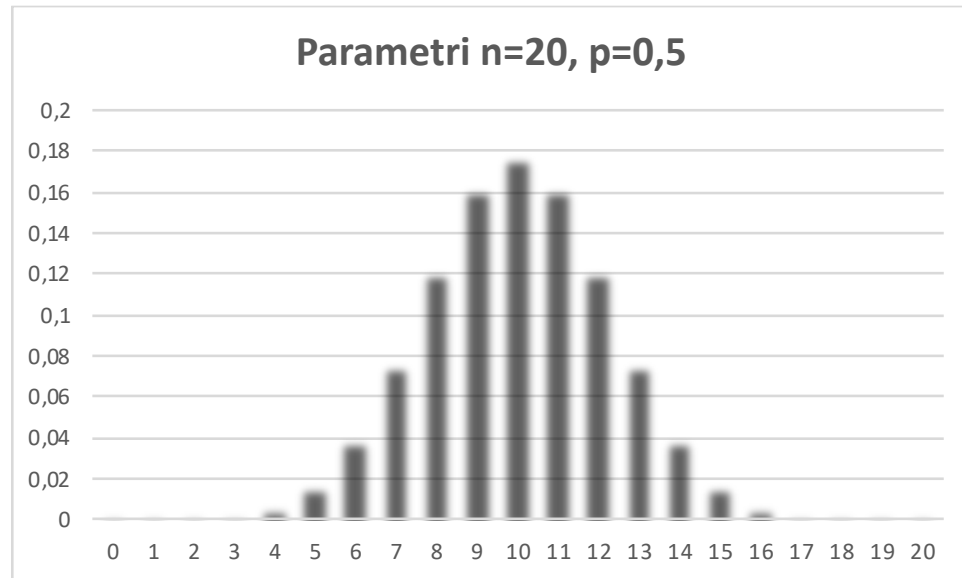
$$\Pr(X = 0) = \binom{3}{0} 0,29^0 (1 - 0,29)^{3-0} = 0,3579 \text{ con coefficiente binomiale} = \frac{3!}{0! (3-0)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$$

$$\Pr(X = 1) = \binom{3}{1} 0,29^1 (1 - 0,29)^{3-1} = 0,4386 \text{ con coefficiente binomiale} = \frac{3!}{1! (3-1)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

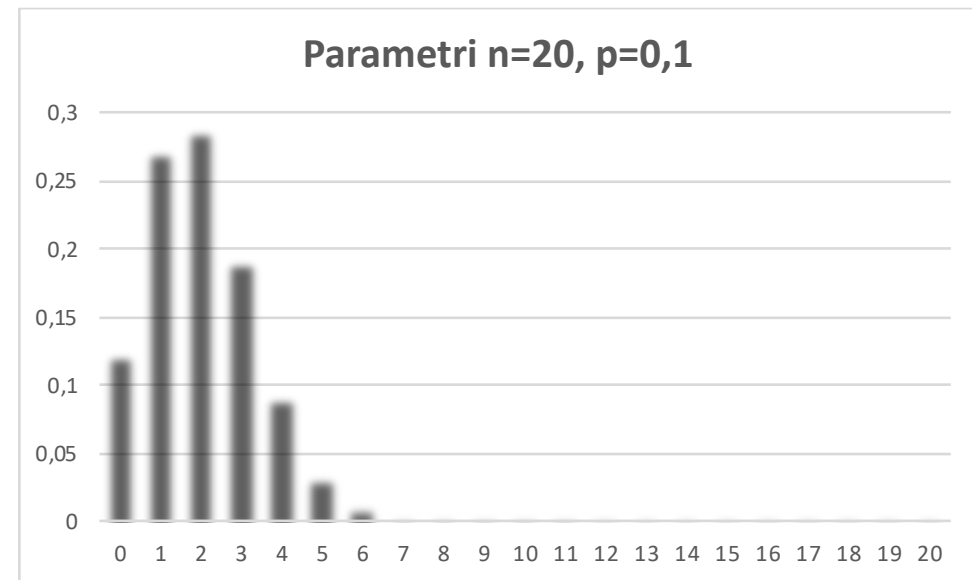
$$\Pr(X = 2) = \binom{3}{2} 0,29^2 (1 - 0,29)^{3-2} = 0,1791 \text{ con coefficiente binomiale} = \frac{3!}{2! (3-2)!} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\Pr(X = 3) = \binom{3}{3} 0,29^3 (1 - 0,29)^{3-3} = 0,0244 \text{ con coefficiente binomiale} = \frac{3!}{3! (3-3)!} = \frac{6}{6} = 1$$

# Distribuzioni di Probabilità - Binomiale

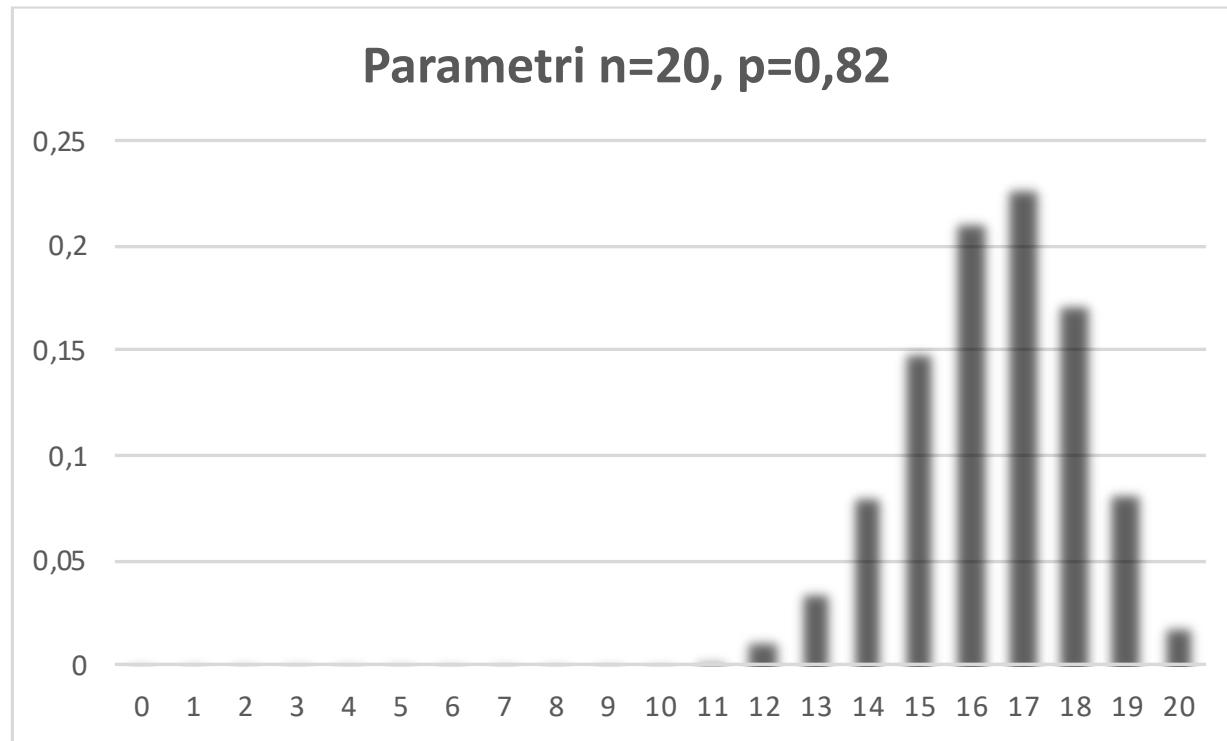


Per  $p=0,5$  la distribuzione è simmetrica attorno al valore medio (si noti che il valore medio =  $10 = np$ )



Per  $p=0,1$  la distribuzione è asimmetrica attorno al valore medio = 2

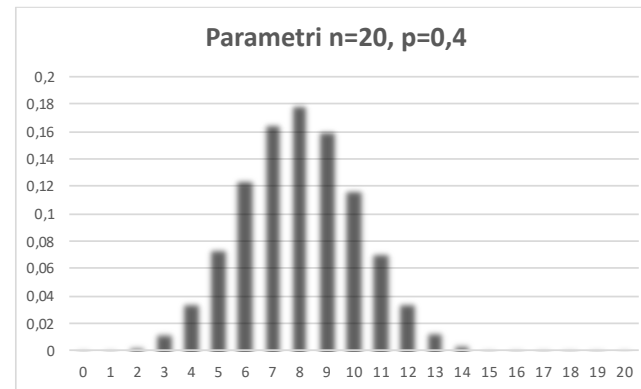
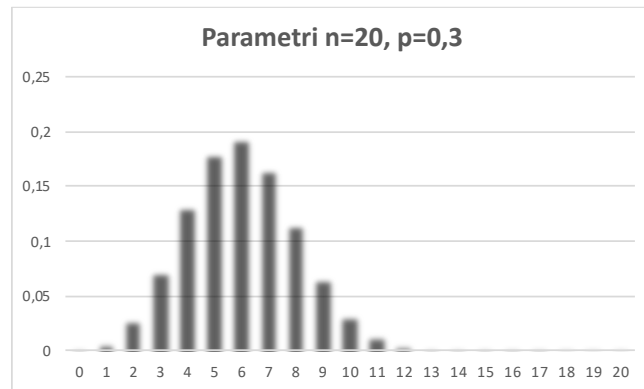
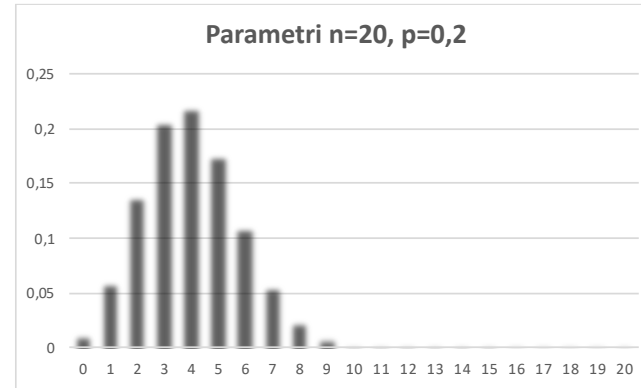
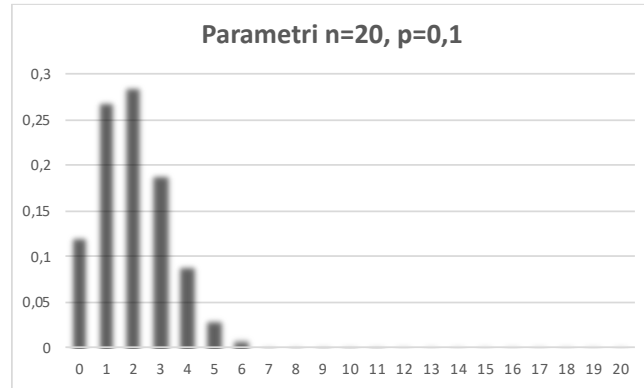
# Distribuzioni di Probabilità - Binomiale



Distribuzione di probabilità della variabile binomiale sesso su un campione di 20 individui con probabilità stimate di  $p=0,82$  (dati della classe di 57 studenti)

# Distribuzioni di Probabilità - Binomiale

Si noti il progressivo  
aumento della  
simmetria  
all'aumentare del  
valore di  $p$



# Distribuzione Multinomiale



## Distribuzioni di Probabilità - Multinomiale

- La distribuzione di probabilità multinomiale è una estensione della binomiale e si applica a  $k$  eventi indipendenti di probabilità  $p_1 p_2 p_3 \dots p_k$  (la cui somma è uguale a 1) che possono comparire nel corso di  $N$  prove indipendenti
- Per la distribuzione multinomiale debbono essere soddisfatte le seguenti condizioni:
  - Ogni prova ha più esiti possibili
  - Le prove sono indipendenti tra di loro
  - La probabilità  $p$  di ogni variabile in ogni singola prova è costante

## Distribuzioni di Probabilità - Multinomiale

- La formula che consente di calcolare la probabilità che si verifichino proporzioni congiunte di eventi in N prove è la seguente:

$$Pr_{(n_1; n_2; n_3 \dots n_k)} = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$$

Dove

$N$  = numero di prove totali

$n_1 n_2 \dots n_k$  = numero di eventi di cui si vuole stimare la probabilità

$p_1 p_2 \dots p_k$  = probabilità di ciascun evento

## Distribuzioni di Probabilità - Multinomiale

- Ad esempio si supponga di avere un'urna all'interno della quale sono contenute 100 palline di cui 10 ( $p_1 = 0,1$ ) di colore GIALLO, 40 ( $p_2 = 0,4$ ) di colore ROSSO, 30 ( $p_3 = 0,3$ ) di colore VERDE, 20 ( $p_4 = 0,2$ ) di colore NERO
- Estraendo 10 palline ( $N = 10$ ) si vuole calcolare la probabilità di 2G, 3R, 2V e 3N

$$Pr_{(2G; 3R; 2V; 3N)} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 3!} \cdot (0,1)^2 \cdot (0,4)^3 \cdot (0,3)^2 \cdot (0,2)^3 = 0,0174 \text{ (1,74\%)}$$

# Distribuzione di Poisson

## Distribuzioni di Probabilità - Poisson

- Quando si incontrano distribuzioni di frequenze (per variabili casuali binomiali) in cui la probabilità dell'evento è molto rara ed  $n$  è molto grande la distribuzione di Poisson è una ottima approssimazione della distribuzione binomiale
- La distribuzione di Poisson è utilizzata per modellare eventi discreti che si verificano nel tempo e nello spazio in maniera casuale
- Essendo una distribuzione limite della binomiale quando  $p$  è molto bassa viene spesso chiamata *Distribuzione di eventi rari* (anche se tale definizione è un po' infelice poiché la distribuzione di Poisson rimane valida anche per eventi tutt'altro che rari)

## Distribuzioni di Probabilità - Poisson

- Si supponga che  $X$  sia una variabile casuale discreta che rappresenta il numero di vitelli nati con malformazioni in un anno
- La probabilità di un evento può essere espressa come:

$$\frac{N. \text{ vitelli nati con malformazioni}}{N. \text{ nascite (in un anno)}}$$

- Per fortuna tale probabilità è molto bassa

## Distribuzioni di Probabilità - Poisson

- Il numero di eventi per unità di tempo è assimilabile ad una variabile casuale che segue una distribuzione binomiale

$$\Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

- Se  $p$  è la probabilità di un evento nell'unità di tempo (1 anno) il numero medio di eventi (la frequenza assoluta) è pari a  $\lambda = n \cdot p$
- E' dimostrabile che al crescere di  $n$  la probabilità binomiale di esattamente  $x$  eventi è approssimata dalla distribuzione di Poisson:

$$\Pr(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

Dove  $e = 2,71828$  è una costante (è la base dei logaritmi naturali)

## Distribuzioni di Probabilità - Poisson

- Si osservi che la media di una variabile binomiale (espressa in valori assoluti) è uguale a  $n \cdot p$  e che pertanto la sua varianza è uguale a  $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$
- Essendo  $p$  molto piccola la quantità  $(1 - p) \sim 1$  e pertanto la varianza  $\sigma^2 \sim n \cdot p$
- Vale a dire che la varianza della distribuzione è uguale alla sua media (ed è la proprietà più importante della distribuzione di Poisson)



## Distribuzioni di Probabilità - Poisson

- Come per la binomiale la distribuzione di Poisson implica una serie di assunzioni:
  - La probabilità che un singolo evento si verifichi in un determinato intervallo è proporzionale alla lunghezza dell'intervallo
  - Teoricamente in un singolo intervallo l'evento si può verificare infinite volte
  - Gli eventi si verificano indipendentemente tra un intervallo e l'altro

## Distribuzioni di Probabilità - Poisson

- Si immagini che la probabilità che un vitello alla nascita abbia delle malformazioni sia pari a 0,00024
- Si immagini inoltre che tale probabilità sia stata stimata su un totale di 10.000 nascite in un anno
- Il numero medio di individui coinvolti per unità di tempo (per anno) è pari a:

$$\lambda = 10.000 \cdot 0,00024 = 2,4 \text{ (ogni 10.000 nascite)}$$

# Distribuzioni di Probabilità - Poisson

- Si vuole calcolare la probabilità di 0, 1, 2, 3, 4, 5, >6 nascite di vitelli con malformazioni nell'arco di 1 anno

$$\Pr(X = 0) = \frac{2,4^0}{0!} \cdot e^{-2,4} = 0,0907$$

$$\Pr(X = 1) = \frac{2,4^1}{1!} \cdot e^{-2,4} = 0,2177$$

$$\Pr(X = 2) = \frac{2,4^2}{2!} \cdot e^{-2,4} = 0,2613$$

$$\Pr(X = 3) = \frac{2,4^3}{3!} \cdot e^{-2,4} = 0,2090$$

$$\Pr(X = 4) = \frac{2,4^4}{4!} \cdot e^{-2,4} = 0,1254$$

$$\Pr(X = 5) = \frac{2,4^5}{5!} \cdot e^{-2,4} = 0,0602$$

## Distribuzioni di Probabilità - Poisson

- Poiché i risultati sono mutuamente esclusivi ed esaustivi la probabilità di  $\geq 6$  sarà:

$$\Pr(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - (0,0907 + 0,2177 + 0,2613 + 0,2090 + 0,1254 + 0,0602) = 0,0357$$

- Naturalmente la somma delle probabilità di ciascun risultato è uguale a 1
- Tali probabilità possono essere confrontate con valori osservati

## Distribuzioni di Probabilità - Poisson

- Esempio: *Rhizobium trifolii* è un batterio del suolo e quando cresce in un liquido di coltura le particelle batteriche producono una sostanza gommosa che le fa aggregare
- Viene condotto un esperimento immettendo nel liquido di coltura una sostanza di cui si vuole sperimentare la capacità di prevenire l'aggregazione. La sospensione viene poi distribuita in una camera di conta e vengono ottenuti i risultati riportati nella tabella che segue (le camere di conta sono praticamente dei vetrini per microscopio divisi in tanti quadrati e dove all'interno di essi si contano gli eventi)

## Distribuzioni di Probabilità - Poisson

Numero di batteri per quadrato	Numero di quadrati	Totale batteri
0	34	34 x 0
1	68	68 x 1
2	112	112 x 2
3	94	94 x 3
4	55	55 x 4
5	21	21 x 5
6	12	12 x 6
7-	4	4 x 7
TOTALE	400	999
MEDIA	$999/400 = 2,5$	

## Distribuzioni di Probabilità - Poisson

- Il problema è di capire se la distribuzione osservata può essere descritta correttamente con la distribuzione di probabilità di Poisson
- La media della distribuzione (numero medio di batteri per quadrato) è pari a  $\bar{x} = 2,5$  con varianza pari a  $s^2 = 2,3$
- Media e Varianza sono molto simili e ciò fa ritenere che la distribuzione di Poisson sia idonea a descrivere i dati

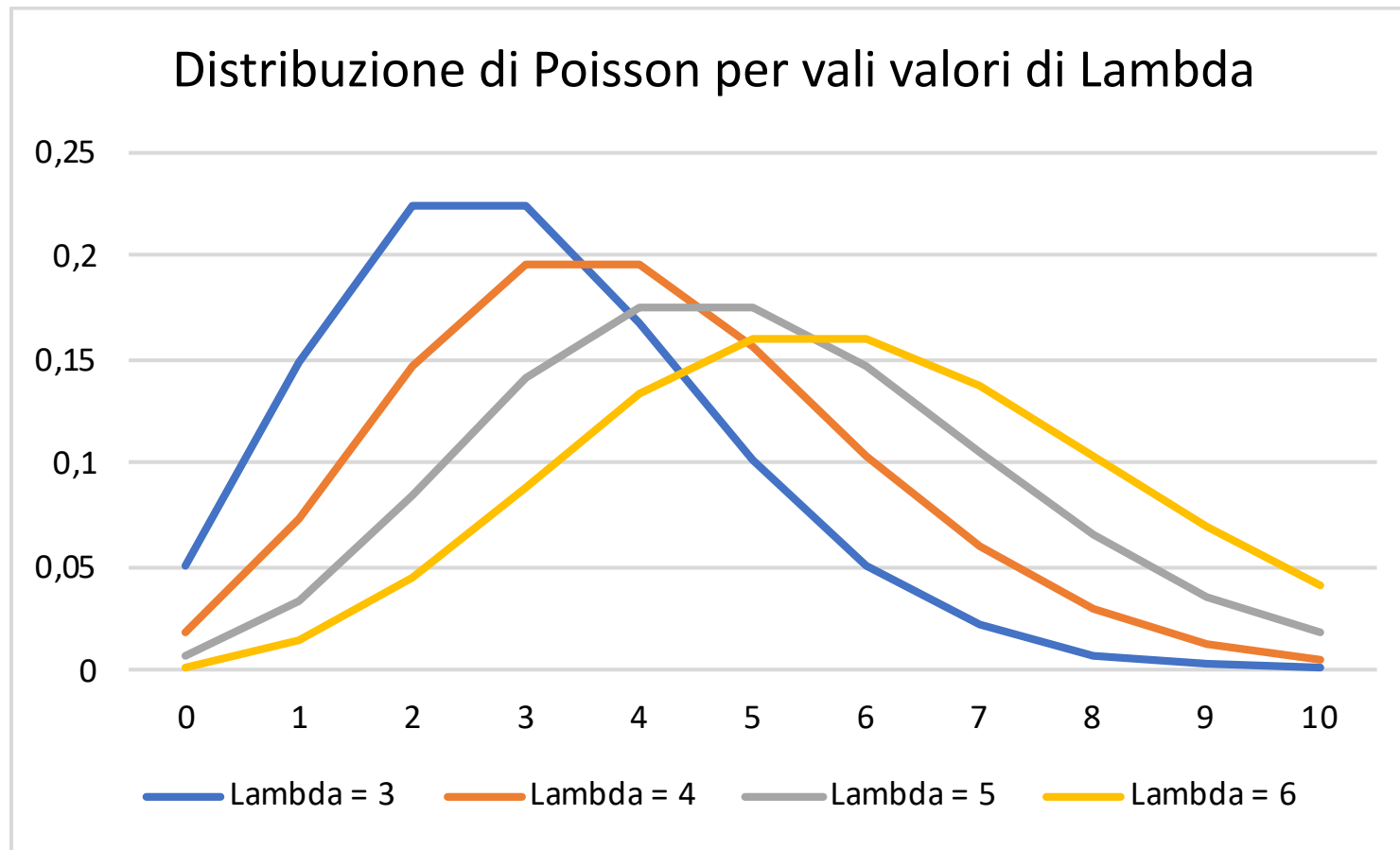
## Distribuzioni di Probabilità - Poisson

Numero di batteri per quadrato	Numero di quadrati	Valore atteso secondo la distribuzione di Poisson
0	34	32,8
1	68	82,1
2	112	102,6
3	94	85,5
4	55	53,4
5	21	26,7
6	12	11,1
7-	4	5,7
TOTALE	<b>400</b>	<b>400</b>

NOTA: I valori osservati e quelli attesi in base alla distribuzione di Poisson sono molto simili e sembrerebbero indicare che la sostanza ha effettivamente avuto un effetto anti-aggregante



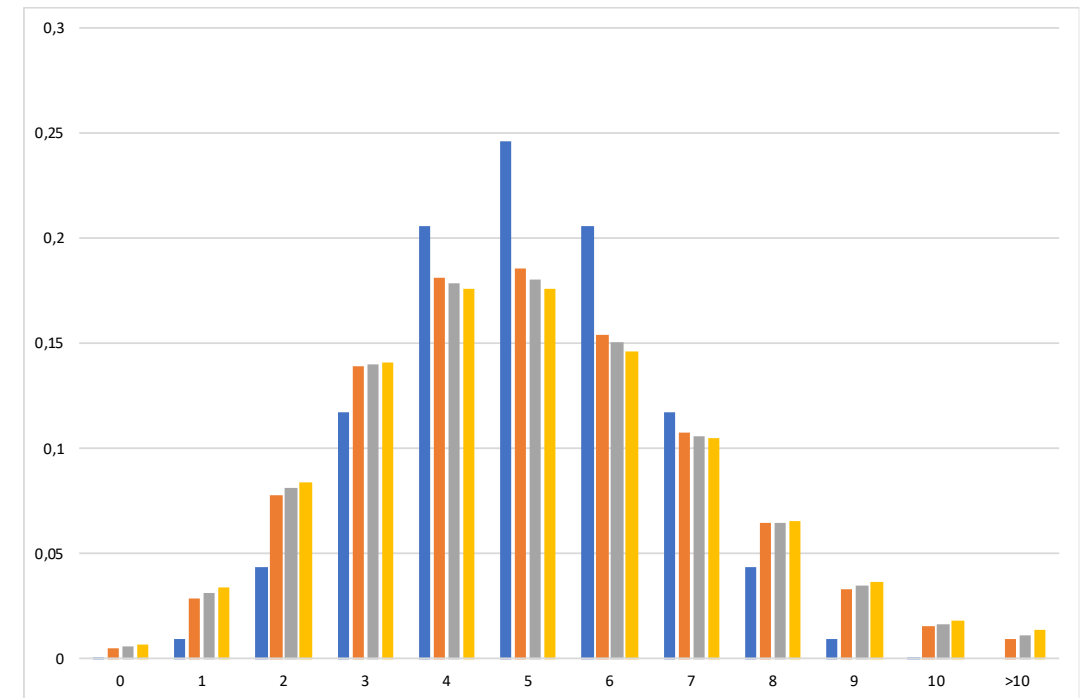
## Distribuzioni di Probabilità - Poisson



# Distribuzioni di Probabilità - Poisson

Confronto tra le probabilità calcolate con la Binomiale e con la Poissoniana

		Lambda = 5				
		p	0,5	0,1	0,05	
		n	10	50	100	
	successi		Probabilità binomiali			Probabilità di Poisson
	0		0,0010	0,0052	0,0059	0,0067
	1		0,0098	0,0286	0,0312	0,0337
	2		0,0439	0,0779	0,0812	0,0842
	3		0,1172	0,1386	0,1396	0,1404
	4		0,2051	0,1809	0,1781	0,1755
	5		0,2461	0,1849	0,1800	0,1755
	6		0,2051	0,1541	0,1500	0,1462
	7		0,1172	0,1076	0,1060	0,1044
	8		0,0439	0,0643	0,0649	0,0653
	9		0,0098	0,0333	0,0349	0,0363
	10		0,0010	0,0152	0,0167	0,0181
	> 10		0,0000	0,0094	0,0115	0,0137
			1,0000	1,0000	1,0000	1,0000



Al crescere di  $n$  ed al diminuire di  $p$  l'approssimazione tra le due distribuzioni migliora

## Distribuzioni di Probabilità - Poisson

- La distribuzione di Poisson trova applicazione quando gli eventi sono distribuiti casualmente nel tempo e nello spazio
- Un esempio di spazio unidimensionale può essere ad esempio un filo di cotone lungo il quale si possono verificare imperfezioni con probabilità costante in ogni punto
- Uno spazio bidimensionale potrebbe essere costituito da un vetrino di microscopio dove vengono effettuati conteggi di particelle ben mescolate e dove la media è pertanto rappresentata dai conteggi per unità di superficie
- Uno spazio tridimensionale può essere invece una sospensione liquida di batteri dove il valore medio è dato dai conteggi per unità di volume

# Distribuzione Normale

## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- Le distribuzioni Binomiale, Multinomiale o di Poisson si riferiscono a variabili casuali discrete
- La più importante distribuzione di probabilità continua è la Gaussiana o, come viene spesso definita, NORMALE
- Normale non va inteso come ‘la norma’ poiché molte distribuzioni empiriche sono innegabilmente lontane dalla ‘normale’ ma senza per questo essere ‘anormali’

## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

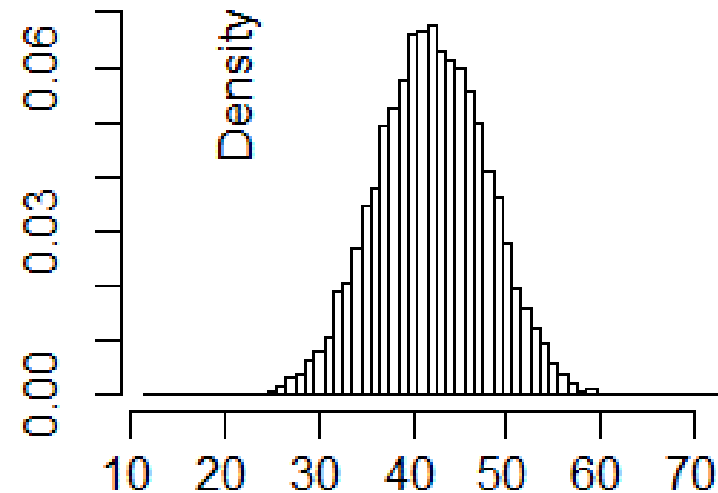
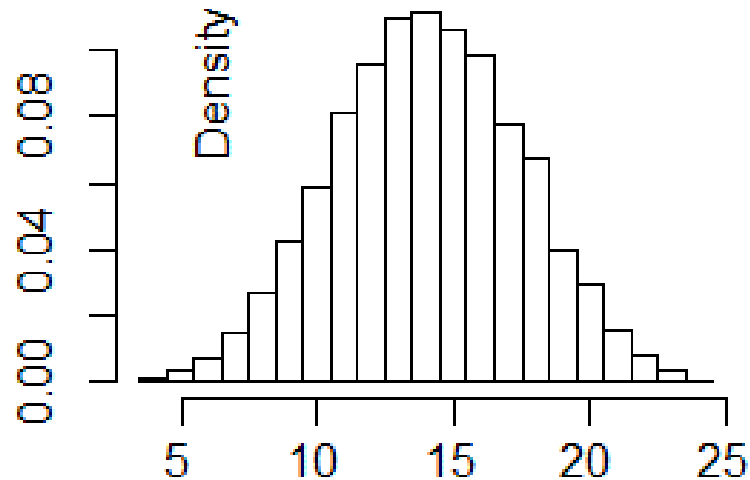
- L'importanza della distribuzione normale giace non tanto nella sua capacità di rappresentare un largo spettro di distribuzioni empiriche quanto nella posizione centrale che occupa nella teoria del campionamento
- Per ora è sufficiente considerare la distribuzione normale come una delle numerose forme che può assumere una variabile casuale continua
- Una prima importante differenza con le distribuzioni di frequenza viste sino ad ora è che le precedenti sono discrete e pertanto il valore della probabilità è associato ad un valore ben definito mentre per le distribuzioni continue si parla di 'densità di probabilità'

## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- Si immagini di disporre di tutti i dati relativi alle altezze di tutti gli individui nel mondo e di averli raggruppati in classi di ampiezza uguali
- Anche se riducessi l'ampiezza della classe a valori sempre più piccoli avrei sempre comunque un considerevole numero di dati e li si può immaginare 'addensati' lungo la scala di valori continua (da cui 'densità di probabilità')

## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- Si deve fare uno sforzo di immaginazione nel vedere l'ampiezza delle singoli classi di frequenza che si riduce a valori che si avvicinano sempre più allo zero (un argomento che si era già visto quando si era parlato delle densità di frequenze)





## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- Se immaginiamo dei rettangoli (corrispondenti alle classi di frequenza) la cui base si riduce sempre di più, i due lati verticali tendono a fondersi verso un unico segmento di uguale altezza
- Si genererà una funzione chiamata 'Funzione di densità di probabilità'  $f(x)$  che è data dall'espressione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Dove:

$e = 2,718 \dots$  (*base dei logaritmi naturali*)

$\pi = 3,14159 \dots$  (*è una costante matematica*) e non il parametro della distribuzione binomiale visto in precedenza

La funzione è interamente definita dai parametri  $\mu$  (media) e  $\sigma$  (deviazione standard)

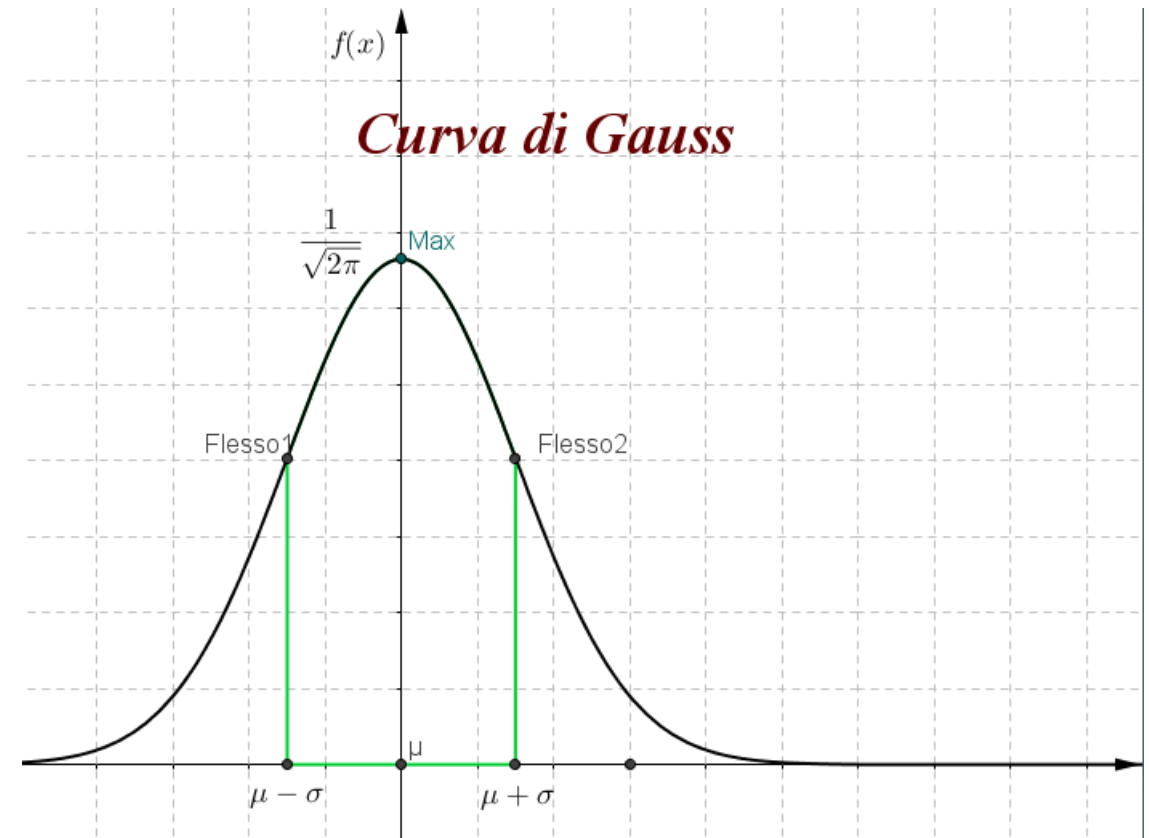
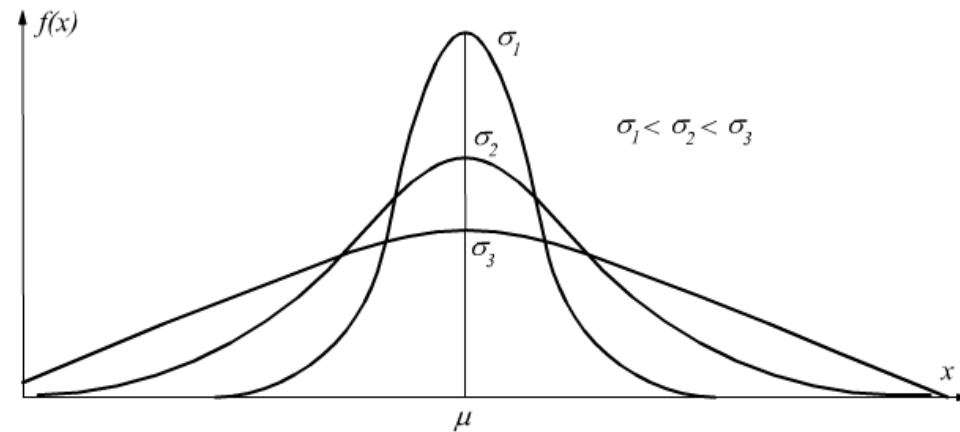
# Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

La funzione è simmetrica attorno al valore medio

Ha due punti di flesso in corrispondenza dei valori di  $x = \mu - 1\sigma$  e  $x = \mu + 1\sigma$

L'area sottesa alla curva rappresenta la probabilità totale (è pari quindi a 1)

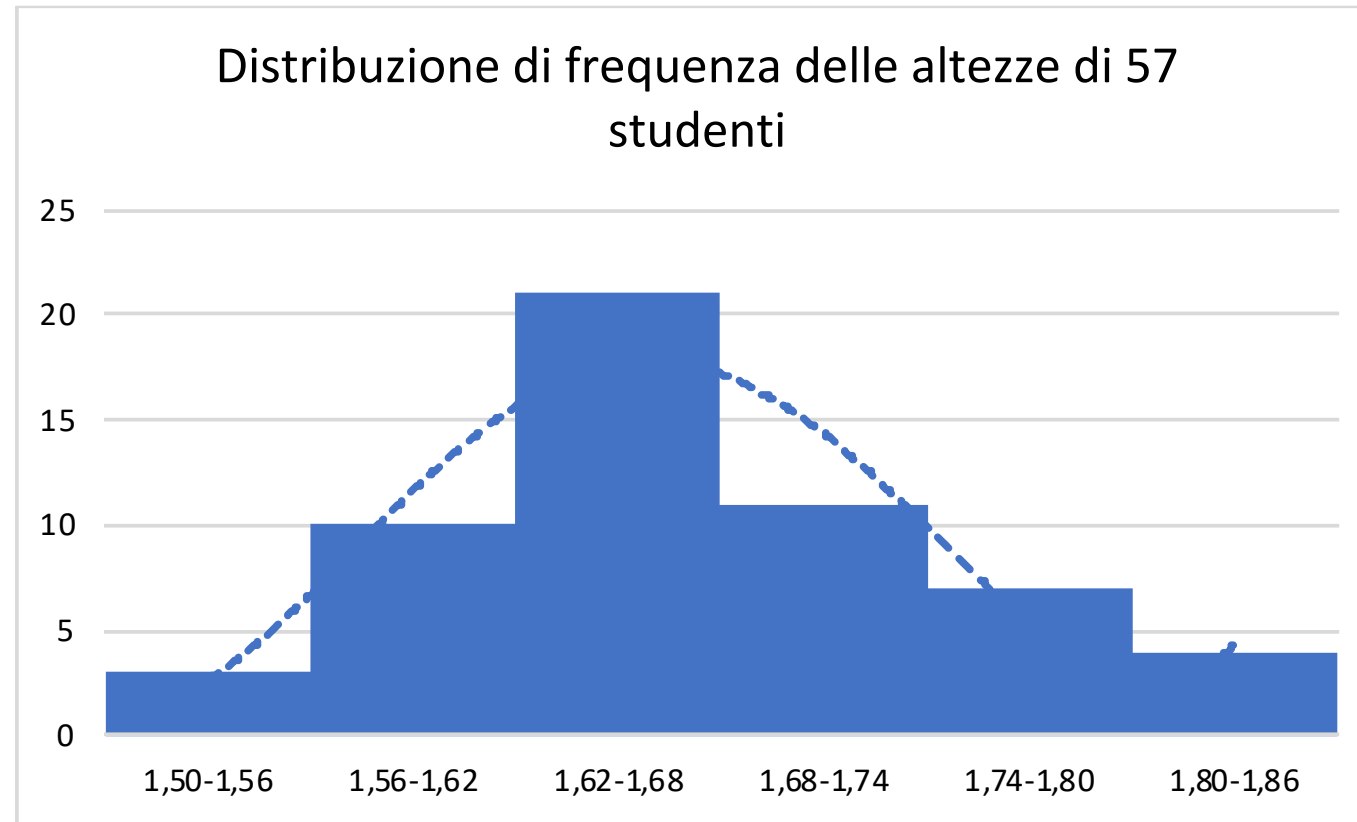
La curva va da  $-\infty$  a  $+\infty$



# Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

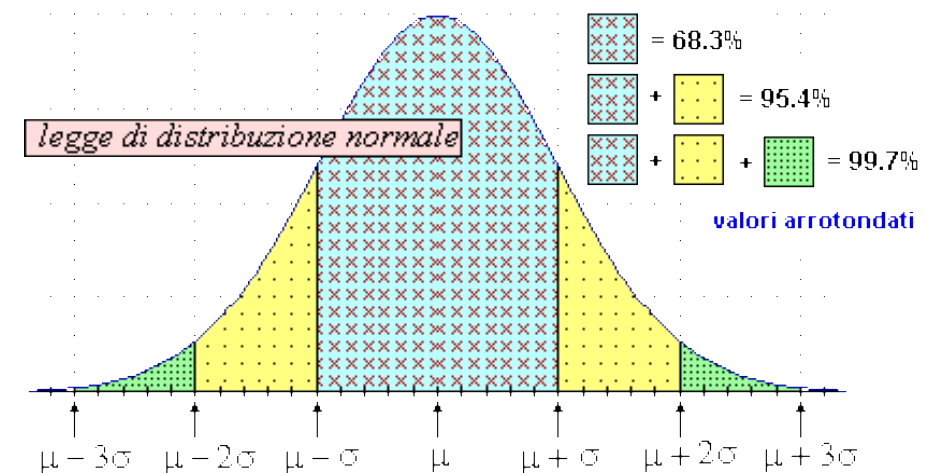
Media = 1,67

ds = 0,07



# Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- Sull'asse orizzontale sono indicate la posizione della media  $\mu$  e dei valori di  $x$  che differiscono dal valore medio  $\mu$  rispettivamente di  $\pm 1\sigma$ ,  $\pm 2\sigma$ ,  $\pm 3\sigma$
- Si osserva inoltre che l'area della distribuzione delimitata dai valori compresi tra  $\mu + 2\sigma$  e  $\mu - 2\sigma$  rappresenta la probabilità che la variabile casuale  $x$  sia compreso tra  $\mu \pm 2\sigma$  ed equivale a poco più del 95% della probabilità totale (vale a dire che il 95,4% dei valori della variabile casuale sono compresi all'interno di questo intervallo)

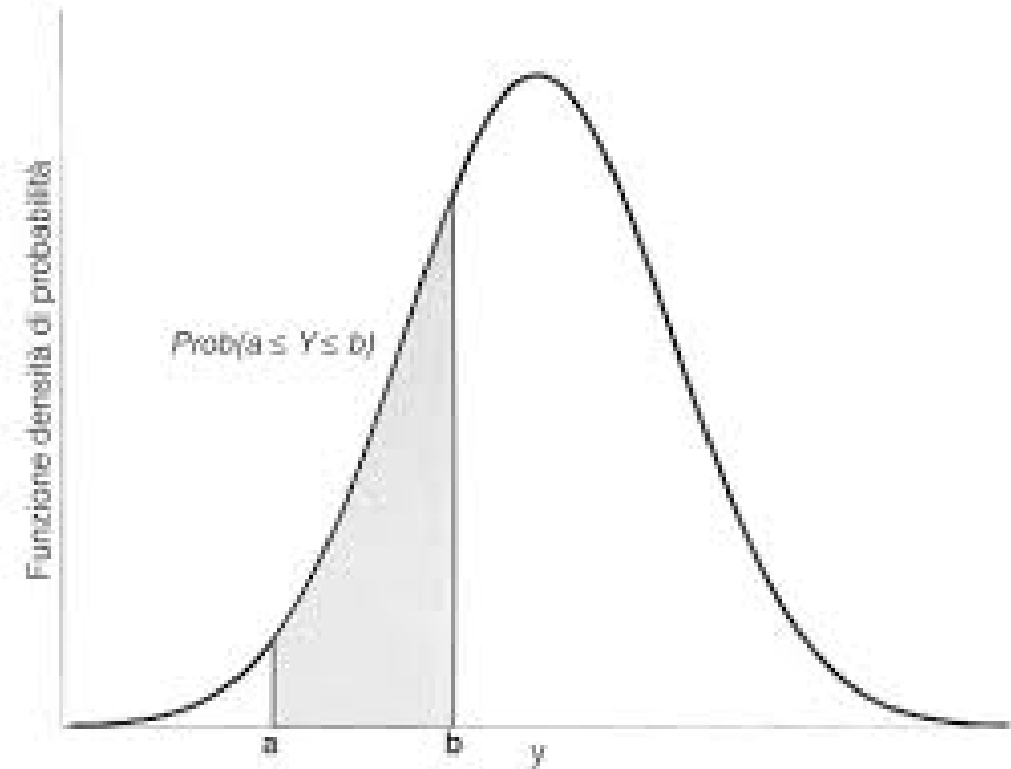


## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- Era già stato accennato al fatto che quando abbiamo a che fare con distribuzioni di tipo continuo sarebbe praticamente impossibile calcolare la probabilità di un singolo valore (a differenza di quanto avviene per le variabili casuali di tipo discreto)
- Ad esempio la probabilità esatta che l'altezza di una persona sia pari a 170,342567.... (misura continua) è pari a 0
- Quello che però si può fare è di calcolare l'area sottesa alla funzione di densità di probabilità compresa tra due intervalli specifici (ad esempio si potrebbe calcolare l'area compresa tra l'altezza di 170 e 172 cm.)

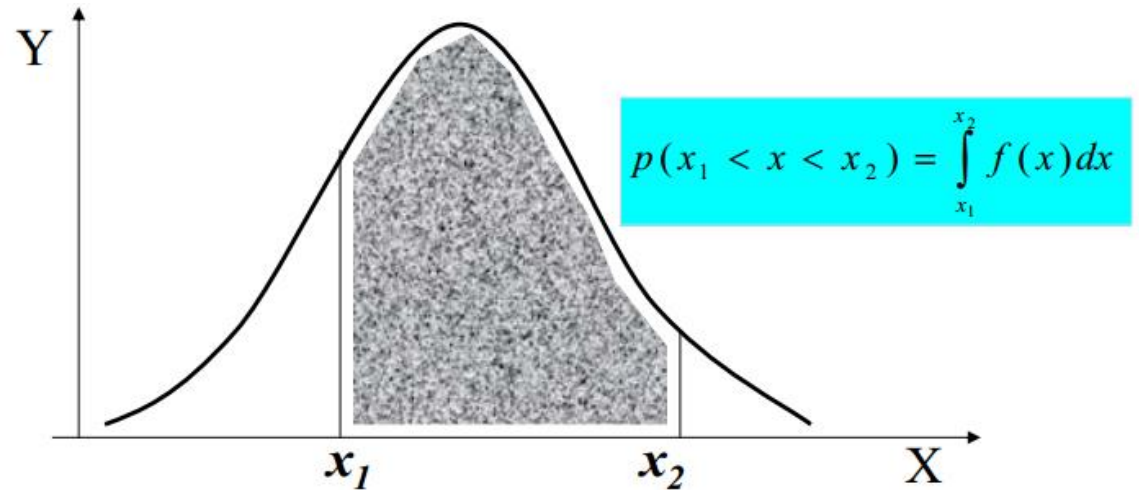
## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- L'area compresa tra due valori rappresenterà la frazione di probabilità totale (e quindi la probabilità) che si verifichi l'evento e dove in questo caso l'evento è rappresentato dalla probabilità che l'altezza sia compresa tra 170 e 172 centimetri



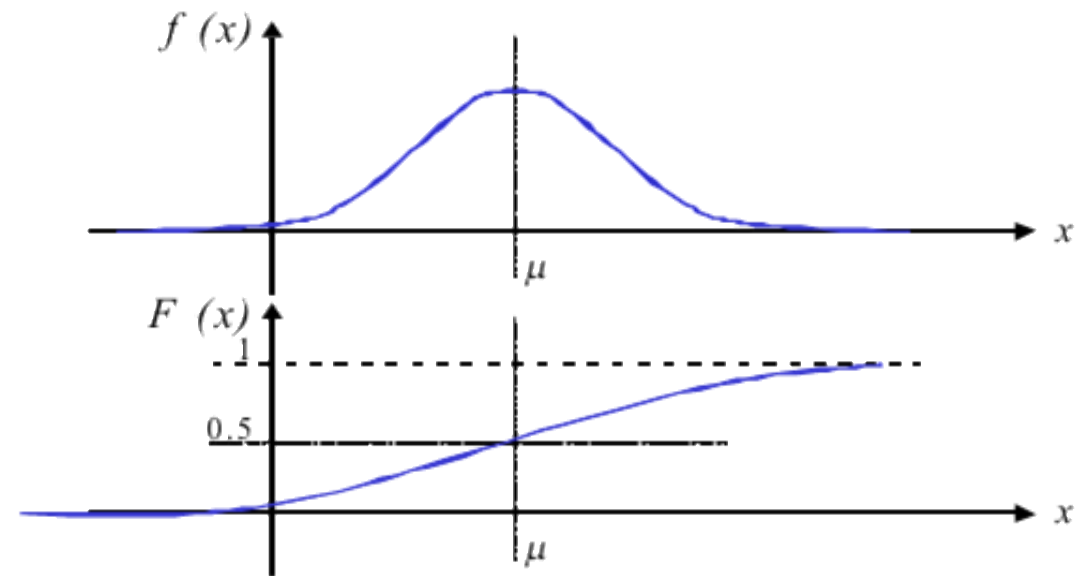
## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- Poniamo il caso che nel grafico  $a = 170$  e  $b = 172$
- L'area sottesa al tratto di funzione compresa tra  $x_1$  e  $x_2$  è la probabilità che l'altezza sia compresa tra 170 e 172
- Praticamente è l'area che va da  $[-\infty a x_2] - [-\infty ad x_1]$



## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- Nella parte superiore del grafico è rappresentata la funzione di Densità di Probabilità
- Nella parte inferiore la Distribuzione di Ripartizione (che praticamente è la Funzione cumulativa = la funzione primitiva (l'integrale) della funzione densità)





## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- Quindi tornando al problema di dover calcolare la probabilità dell'altezza compresa tra 170 e 172 centimetri dovremmo conoscere i parametri della distribuzione (media e deviazione standard) e poi costruire la funzione di Densità di Probabilità e poi la funzione integrale  $F$  attraverso la quale calcolare l'area corrispondente alla probabilità che stiamo cercando
- E' ovvio che tale procedura andrebbe ripetuta ogni volta ci si trova a dover analizzare dati di una variabile quantitativa
- I matematici che hanno studiato le proprietà della curva normale hanno ideato un modo per standardizzare i dati e poi costruire delle tavole degli integrali che possono essere quindi applicate a qualsiasi distribuzione di una variabile quantitativa indipendentemente dalla unità di misura (che quindi vale sia che si tratti di pesi, di altezze, di pressione arteriosa, ecc..)

## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- In particolare hanno trovato che standardizzare ciascun valore per la deviazione standard ha dei notevoli vantaggi
- Cosa significa standardizzare il valore di una variabile per il valore della sua deviazione standard? Che ciascun valore della variabile invece che essere misurato nella unità di misura originale (le altezze in cm, il peso in Kg, la pressione arteriosa in mmHg, ecc) viene misurato in 'unità di deviazione standard'

## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

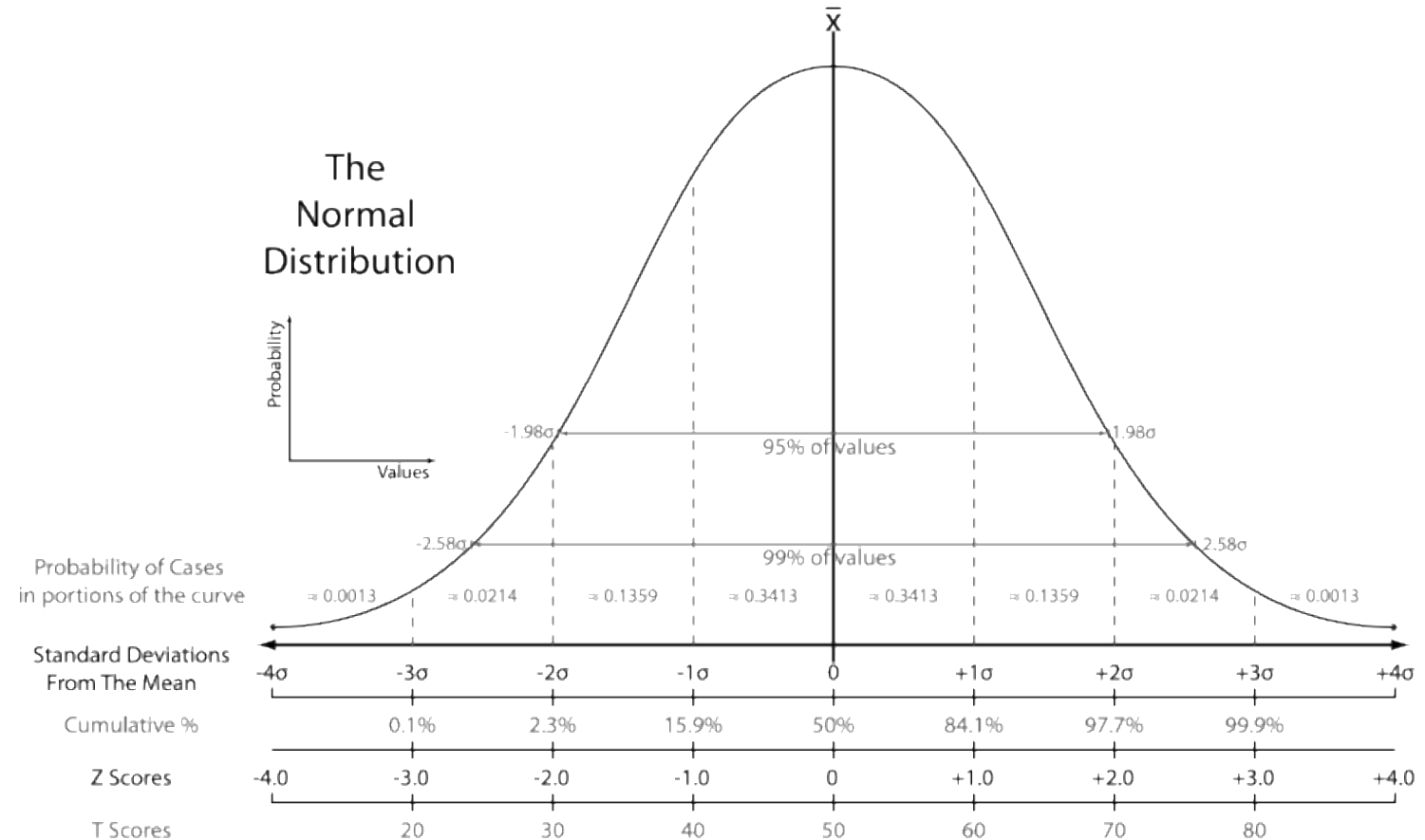
- La standardizzazione della distribuzione viene operata rispetto al valore della Deviazione Standard e ciò porta a costruire una nuova variabile (standardizzata) denominata Z

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- La variabile standardizzata Z avrà distribuzione con  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$  e questo vale indipendentemente dalle unità di misura originali della variabile

# Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

Grafico della  
Distribuzione della  
Deviata Normale  
standardizzata



# Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

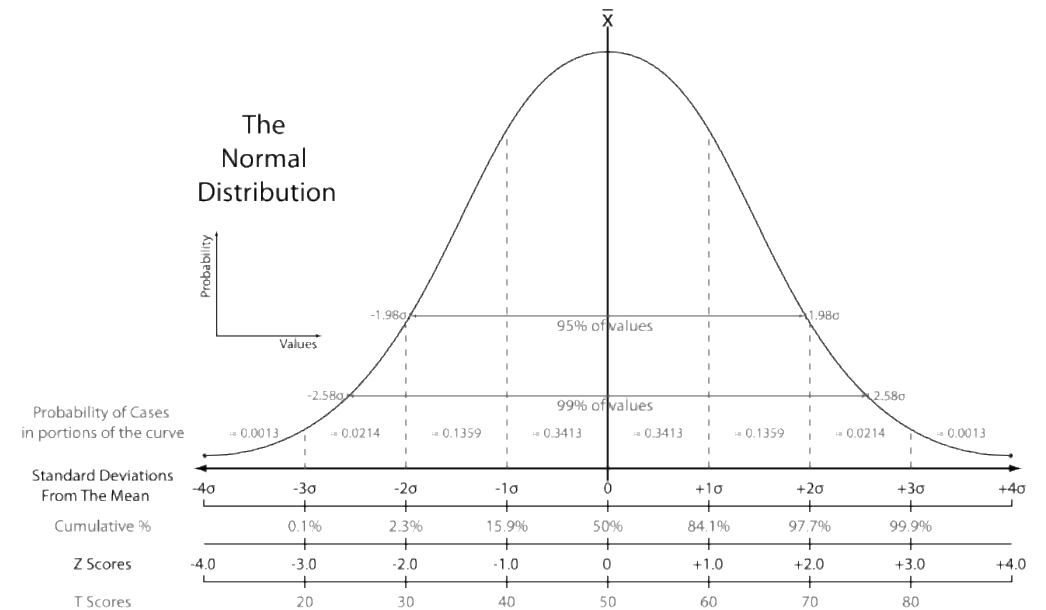
- Anche per la Z esisterà una funzione di densità di probabilità e una funzione di ripartizione

- Funzione densità  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}$

- L'integrale della curva Normale Standard in z:

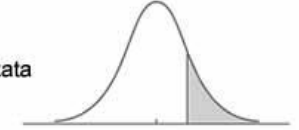
$$F(z) = \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} d(z)$$

- Si osservi che nelle funzioni della deviato standardizzata i parametri della distribuzione  $\mu$  e  $\sigma$  sono spariti



# Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

**Tavola 1B: Aree della distribuzione normale standardizzata**



- La prima colonna a sinistra sotto la Z indica i valori della prima cifra e della prima decimale della deviato standardizzata mentre nelle prima riga in alto (sempre in corrispondenza di Z) sono riportati i valori della seconda cifra decimale
- Si deve sempre prima leggere la colonna verticale (per individuare la riga) e poi procedere lungo la riga fino a trovare il valore della colonna corrispondente alla seconda cifra decimale
- Ad esempio il valore corrispondente a  $Z = 0,91$  lo si troverà nella riga corrispondente a 0,9 nell'incrocio con la colonna 0,01

Z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000





# Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- Nella tavola a destra viene invece calcolata l'area (e quindi la relativa probabilità) fino un determinato valore di Z a partire dalla estremità sinistra della curva equivalente a  $-\infty$

Tavola 1: Funzione di ripartizione della Variabile Casuale Normale Standardizzata

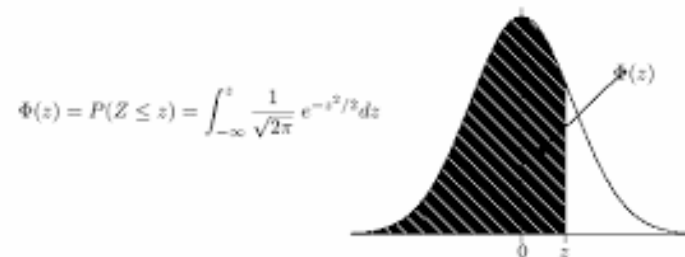


Tavola D.2 Funzione di ripartizione normale

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

x	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
Φ(x)	.90	.95	.975	.99	.995	.999	.9995	.99995	.999995
2[1 - Φ(x)]	.20	.10	.05	.02	.01	.002	.001	.0001	.00001



## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- Quindi tornando al problema di dover calcolare la probabilità dell'altezza compresa tra 170 e 172 centimetri i risultati relativi alle altezze degli studenti possono essere espressi come Deviata Standardizzata
- Supponiamo che la Media e la Deviazione Standard siano quelle della popolazione di studenti del primo anno di SPA-TAEC

$$\mu = 167 \quad \sigma = 7$$

- Supponiamo inoltre che la distribuzione sia perfettamente simmetrica

## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- A questo punto possiamo risolvere il problema del calcolo della probabilità che l'altezza sia compresa tra 170 e 172 in una popolazione che ha i seguenti parametri:

$$\mu = 167 \quad \sigma = 7$$

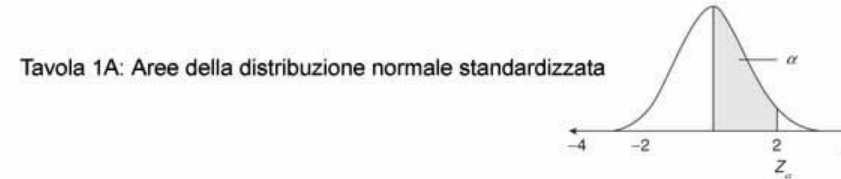
Con i rispettivi valori di Z pari a:

$$Z_1 = \frac{170-167}{7} = 0,428 \quad Z_2 = \frac{172-167}{7} = 0,714$$

## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- E' importante osservare che i due valori di  $Z$  si trovano rispettivamente a distanza di 0,428 e 0,714 deviazioni standard dal valore medio della deviat standard (che è pari a 0) e quindi sono a destra del valore medio
- Se si usa la tavola che riporta i valori delle aree da  $Z$  a  $+\infty$  si vede che in corrispondenza di  $Z=0,41$  e  $Z=0,71$  i valori delle aree sono pari a 0,3336 e 0,2389 pertanto la probabilità di altezza compresa tra 170 e 172 è data dalla differenza  $0,3336 - 0,2389 = 0,0947$  (9,47%)
- Se si usa la tavola della funzione di ripartizione (che va da  $-\infty$  a  $Z$ ) i valori i corrispondenza di 0,41 e 0,71 sono rispettivamente 0,6664 e 0,7611 e pertanto la probabilità di altezza compresa tra 170 e 172 è data da  $0,7611 - 0,6664 = 0,0947$  (9,47%)

# Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)



- Esiste una terza tavola della distribuzione della devziata standardizzata dove i valori tabulati corrispondono alle aree da 0 a  $+Z$
- Ad esempio se calcolassimo le probabilità dell'altezza compresa tra 170 e 172 usando questa tavola i valori corrispondenti a  $Z=0,43$  e  $Z=0,71$  sono pari a 0,1664 e 0,2611 rispettivamente
- La differenza  $0,2611 - 0,1664 = 0,0947$  (9,47%) come visto con le precedenti tavole
- Se il valore di  $Z$  fosse negativo l'area corrispondente è uguale (per ragioni di simmetria) al valore dell'area tabulata con valori di  $Z$  positivi (a destra del valore medio)

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
4.0	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- La distribuzione normale è molto importante poiché spesso si rivela utile come approssimazione alla distribuzione binomiale e poissoniana
- La distribuzione binomiale tende ad assumere una distribuzione normale per qualunque valore di  $\pi$  al crescere di  $n$  oltre ogni limite
- La tendenza alla normalità è più spiccata per valori di  $\pi$  vicini a  $\frac{1}{2}$  che per valori vicino a 0 o a 1
- La condizione per cui una variabile binomiale può essere approssimata alla normale è che  $\pi n$  e  $(1 - \pi)n$  siano superiori a 5

## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- Secondo queste considerazioni e purchè  $n$  sia sufficientemente grande una variabile binomiale  $s$  può essere considerata come distribuita approssimativamente in modo normale con media  $n\pi$  e deviazione standard  $\sqrt{n\pi(1 - \pi)}$

## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- La distribuzione di Poisson con media  $\lambda$  tende alla normalità al crescere di  $\lambda$  e per questo motivo una variabile poissoniana  $x$  può essere considerata distribuita normalmente con media  $\lambda$  e deviazione standard  $\sqrt{\lambda}$
- Per valori di  $\lambda$  uguali a 10 l'approssimazione alla normalità è già buona

## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- Se si usano le tavole della distribuzione normale standardizzata  $Z$  per approssimare distribuzioni binomiali e poissoniane è necessario tenere conto del fatto che queste distribuzioni sono discrete mentre la normale descrive distribuzioni di tipo continuo
- A questo proposito è utile introdurre la cosiddetta **correzione per la continuità** attraverso la quale si approssima la probabilità esatta di una variabile binomiale tramite il valore della probabilità di una variabile casuale continua nell'intervallo  $s + \frac{1}{2}$  e  $s - \frac{1}{2}$
- Pertanto la probabilità che una variabile binomiale  $s$  assuma valori superiori o uguali a  $s$  può essere approssimata dall'area della coda della curva normale che giace a destra del valore della devziata normale standardizzata:

$$Z = \frac{|s - n\pi| - \frac{1}{2}}{\sqrt{n\pi(1 - \pi)}}$$

Nota: le linee verticali tra  $s - n\pi$  indicano che bisogna usare il valore assoluto , cioè il valore numerico senza il segno



## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- In maniera del tutto analoga si può approssimare la distribuzione di Poisson ad una Normale Standardizzata mediante:

$$Z = \frac{|x - \lambda| - \frac{1}{2}}{\sqrt{\lambda}}$$

## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- Esempi di approssimazione della distribuzione binomiale tramite la distribuzione normale con correzione per la continuità:

$\pi$	$n$	$n\pi$	$\sqrt{n\pi(1-\pi)}$	s	Pr esatta	Z	Pr con approssimazione normale
0,5	10	5	1,581	$\leq 2$ o $\geq 8$	0,0547	1,581	0,0579
0,1	50	5	2,121	$\leq 2$ o $\geq 8$	0,1117	1,179	0,1192
0,5	40	20	3,162	$\leq 14$ o $\geq 26$	0,0403	1,739	0,0410
0,2	100	20	4,000	$\leq 14$ o $\geq 26$	0,0804	1,375	0,0846

## Distribuzioni di Probabilità – Normale (o di Gauss)

- Esempi di approssimazione della distribuzione Poissoniana tramite la distribuzione normale con correzione per la continuità:

$\lambda$	$\sqrt{\lambda}$	Valori di $x$	Pr esatta	$Z = \frac{ x - \lambda  - \frac{1}{2}}{\sqrt{\lambda}}$	Pr con approssimazione normale
5	2,236	0	0,0067	2,013	0,0221
		$\leq 2$	0,1246	1,118	0,1318
		$\geq 8$	0,1334	1,118	0,1318
		$\geq 10$	0,0318	2,013	0,0221
20	4,472	$\leq 10$	0,0108	2,124	0,017
		$\leq 15$	0,1565	1,006	0,1446
		$\geq 25$	0,1568	1,006	0,1446
		$\geq 30$	0,0218	2,124	0,017